Institut für Signalverarbeitung und Sprachkommunikation — Prof. G. Kubin
Technische Universität Graz

Prüfung zur Vorlesung Signalverarbeitung am 8.5.2020

Name MatrNr. StudKennz.

Haben Sie das Magnitude Response Learning Tool bei der Prüfungsvorbereitung genutzt?

☐ Nein. ☐ Ja, gelegentlich. ☐ Ja, (sehr) intensiv.

Prüfungsdauer: 3 Stunden, Erreichbare Punkte: 100
Erlaubtes Material: Formelsammlung (wird ausgeteilt), mathematische Formelsammlung, wissenschaftlicher Taschenrechner (*kein* alphanumerischer)
Die Angabeblätter und die Formelsammlung müssen am Schluss wieder abgegeben werden!

Theoriefragen – Multiple Choice (20 Punkte)

Bitte kreuzen Sie die richtigen Antworten an. Es gibt zu jeder Frage genau eine richtige Antwort. Für jede richtige Antwort erhalten Sie 4 Punkte, für jede falsche Antwort werden 2 Punkte abgezogen; für nicht beanwortete Fragen gibt es weder Punkte noch Punkteabzug, ebenso bei mehr als einer angekreuzten Antwort. Insgesamt können Sie auf den Multiple-Choice-Teil nicht weniger als 0 Punkte erhalten.

(a) Welcher der folgenden Differenzengleichungen gehört nicht zu einem LTI-System?

☐ $y[n] = 0.5 \cdot x[n-1] + x[n] + 0.5 \cdot x[n+1]$

☐ $y[n] = x[n] + 2$

☐ $y[n] = \sum_{k=n-1}^{\infty} x[k]$

(b) Gegeben sei $x[n] = \cos(-\theta_0 n) - j\sin(-\theta_0 n)$. Welche Aussage trifft zu?

☐ $\Re e\{X(e^{j\theta})\} = 0$

☐ $\Re e\{X(e^{j\theta})\} \neq 0$

☐ $\Im m\{X(e^{j\theta})\} \neq 0$

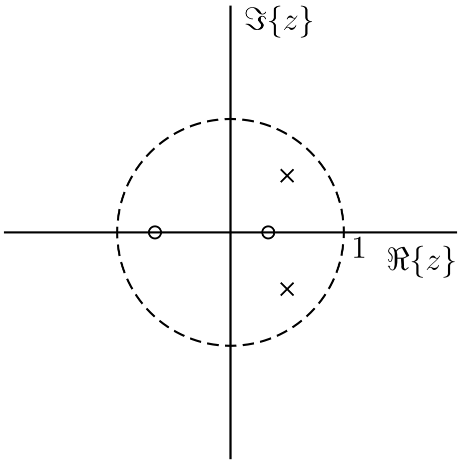


Abb. 1: Pol-/Nullstellendiagramm von $H(z)$.

(c) Welches der folgenden zeitdiskreten Signale, i.e. $n \in \mathbb{Z}$, ist periodisch?

☐ $\cos(3n)$

☐ $\cos(\pi n)$

☐ $\cos(\frac{1}{\pi}n)$

(d) Welche Aussage bezüglich der Stabilität von $H(z)$, repräsentiert durch das Pol-/Nullstellendiagramm in Abb. 1, trifft zu?

☐ $H(z)$ ist stabil.

☐ $H(z)$ ist instabil.

☐ Das Pol-/Nullstellendiagramm alleine reicht nicht aus um zu bestimmen ob $H(z)$ stabil oder instabil ist.

(e) Nach dem Abtasten eines zeitkontinuierlichen Signals $x(t)$, in welchem Verhältnis stehen Fouriertransformierte $X(j\omega)$ und zeitdiskrete Fouriertransformierte (DTFT) $X(e^{j\theta})$?

☐ Die kontinuierlichen Frequenzwerte ω werden durch die Bilineartransformation in äquivalente zeitdiskrete θ übeführt, dadurch wird $X(j\omega)$ zu $X(e^{j\theta})$ umgewandelt.

☐ Die Fourier Tansformierte $X(j\omega)$ wird periodisch wiederholt in Abständen von 2π, wobei dieser Abstand der Abtastfrequenz f_s entspricht und es bei Verletzung des Nyquist Theorems zu Aliasing kommt.

☐ Die Fourier Transformierte $X(j\omega)$ wird in Abständen von $1/f_s$ abgetastet um die DTFT $X(e^{j\theta})$ zu erhalten.

Kurzaufgaben (20 Punkte)

(a) Sei

$$x[n] = \sin(\theta_0 n)$$

mit $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Berechnen Sie die N-Punkte DFT für (i) $\theta_0 = \frac{2\pi}{N}k_0$ und (ii) $\theta_0 \neq \frac{2\pi}{N}k_0$ mit $k_0 \in \mathbb{Z}$ und vereinfachen Sie soweit wie möglich. Erklären Sie den Unterschied zwischen (i) und (ii)!

(b) Gegeben sei ein System mit Impulsantwort

$$h[n] = a^n \sin(bn)u[n], \quad a, b > 0$$

Gesucht ist die z-Transformierte $H(z)$. Skizzieren Sie das Pol-/Nullstellen Diagramm und kennzeichnen Sie den region-of-convergence (ROC) als Funktion der Parameter a und b.

Aufgabe 1 (30 Punkte)

Der Signalraum $\mathcal{X}$ sei definiert wie folgt:

$$\mathcal{X} = \left\{ \langle x_{A,\phi}[n] \rangle \,|\, n \in \mathcal{D}, \phi \in [-\pi, \pi), A \in \mathbb{R} \right\}$$

mit

$$x_{A,\phi}[n] = A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} n + \phi\right)$$

und

$$\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Hinweis: *Alle Unterpunkte dieses Besipiels können grundsätzlich ohne die Ergebnisse der jeweils anderen Unterpunkte gelöst werden.*

(a) Betrachten Sie Basissignale der Form $b_k[n] = \delta[n - k + 1]$ mit $k \in \{1, 2, \ldots, L\}$. Welche Dimension L muss die von den Signalen $\langle b_k[n] \rangle$ aufgespannte Basis $\mathcal{B}$ besitzen um eine vollständige Darstellung aller Signale aus dem Signalraum $\mathcal{X}$ als Linearkombination von Basissignalen $\langle b_k[n] \rangle$ zu garantieren? Schreiben Sie die zugehörigen einzelnen Basisvektoren, i.e.

$$\mathbf{b}_k = \left[b_k[0], b_k[1], b_k[2], b_k[3] \right]^T$$

an.

(b) Gegeben sei nun die zweidimensionale Basis $\mathcal{C}$, definiert über die beiden Basissignale

$$c_1[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right),$$

$$c_2[n] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right).$$

Zeigen Sie unter Zuhilfenahme des Zusammenhangs

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

dass eine vollständige Darstellung aller Signale aus dem Signalraum $\mathcal{X}$ als Linearkombination von $c_1[n]$ und $c_2[n]$ möglich ist. Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die Dimensionen der Basis $\mathcal{B}$ und der Basis $\mathcal{C}$ vergleichen?

(c) Zeigen Sie, dass das Signal $s_1[n] = s$, wobei $s \in \mathbb{C}$ eine Konstante ist, nicht im Signalraum $\mathcal{X}$ liegt. Wie verhält es sich mit $s_2[n] = \delta[n]$?

(d) Sie messen das Signal

$$\langle y[n] \rangle = \langle x[n] \rangle + \langle s[n] \rangle$$

wobei Sie $\langle s[n] \rangle$ als ein Störsignal ansehen und $\langle x[n] \rangle$ ein von Ihnen eigentlich gewolltes Nutzsignal ist. Um eine Schätzung $\langle \hat{x}[n] \rangle$ des Nutzsignals aus dem gemessenen Signal zu extrahieren verwenden Sie folgende Rechenvorschrift:

$$\langle \hat{x}[n] \rangle = \langle y[n] \,|\, c_1[n] \rangle \langle c_1[n] \rangle + \langle y[n] \,|\, c_2[n] \rangle \langle c_2[n] \rangle,$$

wobei $\langle y[n] \mid c[n] \rangle = \sum_{n \in \mathcal{D}} y[n]c[n]$ die Projektion von $y[n]$ auf $c[n]$ darstellt.
Nehmen Sie nun an, die Signale $\langle s_1[n] \rangle$ und $\langle s_2[n] \rangle$ aus Punkt **(c)** entsprächen dem Störsignal $\langle s[n] \rangle$, i.e.

1. $s[n] = s_1[n]$
2. $s[n] = s_2[n]$

Für welches der beiden Störsignale ist der quadratische Schätzfehler

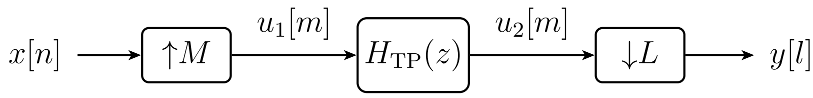
$$\epsilon = \sum_{n \in \mathcal{D}} (x[n] - \hat{x}[n])^2$$

kleiner? Begründen Sie Ihre Antwort! (**Tipp**: Zum Beantworten dieser Frage ist es nicht unbedingt notwendig, den Fehler ϵ explizit zu berechnen.)

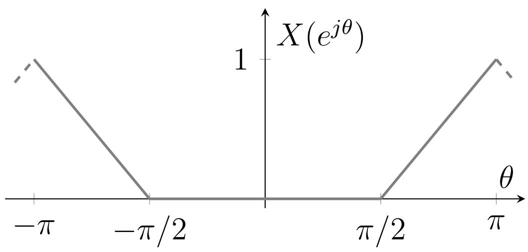
(e) Ist die im Punkt **(d)** zur Störsignalunterdrückung verwendete Methode für Signale $\langle s[n] \rangle \in \mathcal{X}$ effektiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Multiratensystem:



Die Fourier-Transformierte des Eingangssignals $x[n]$ ist gegeben als:



Die Konversionsfaktoren sind gegeben als $M = 3$ und $L = 2$. $H_{\mathrm{TP}}(z)$ ist ein ideales Tiefpassfilter mit Grenzfrequenz θ_c.

(a) Bestimmen Sie die Grenzfrequenz θ_c des Tiefpassfilters, sodass Aliasing vermieden wird.

(b) Skizzieren Sie die Fouriertransformierten der Signale $u_1[m]$, $u_2[m]$ und $y[l]$ für das oben gezeigte Eingangssignal $x[n]$ (bzw. $X(e^{j\theta})$) unter Verwendung von θ_c aus **(a)**. Skizzieren Sie mindestens zwei Perioden des Spektrums.

(c) Betrachten Sie nun das zeitkontinuierliche Signal $x(t) = \sin(4\pi t)$. Gesucht ist die Abtastfrequenz f_s, welche zum abgetasteten Signal $x[n] = \sin(\frac{\pi}{4}n)$ führt.

(d) Skizzieren Sie die Signale $u_1[m]$, $u_2[m]$ und $y[l]$ im Zeitbereich, für $x[n] = \sin(\frac{\pi}{4}n)$ unter Verwendung von θ_c aus **(a)**. Skizzieren Sie im Bereich $0 \leq n \leq 11$.

(e) Kommt es in diesem Multiratensystem für $x[n] = \sin(\frac{\pi}{4}n)$ zu einem Informationsverlust bei allgemeinem M und L? Wenn ja, unter welcher Bedingung kann ein Informationsverlust vermieden werden?