Institut für Signalverarbeitung und Sprachkommunikation — Prof. G. Kubin
Technische Universität Graz

Prüfung zur Vorlesung Signalverarbeitung am 28.10.2020

Name MatrNr. StudKennz.

Prüfungsdauer: 3 Stunden, Erreichbare Punkte: 100
Erlaubtes Material: Formelsammlung (wird ausgeteilt), mathematische Formelsammlung, wissenschaftlicher Taschenrechner (*kein* alphanumerischer)
Die Angabeblätter und die Formelsammlung müssen am Schluss wieder abgegeben werden!

Theoriefragen – Multiple Choice (20 Punkte)

Bitte kreuzen Sie die richtigen Antworten an. Es gibt zu jeder Frage genau eine richtige Antwort. Für jede richtige Antwort erhalten Sie 4 Punkte, für jede falsche Antwort werden 2 Punkte abgezogen; für nicht beantwortete Fragen gibt es weder Punkte noch Punkteabzug, ebenso bei mehr als einer angekreuzten Antwort. Insgesamt können Sie auf den Multiple-Choice-Teil nicht weniger als 0 Punkte erhalten.

(a) Welches der folgenden zeitdiskreten Signale, i.e. $n \in \mathbb{Z}$, ist periodisch?

- ☐ $\cos(3n)$
- ☐ $\cos(\pi n)$
- ☐ $\cos\left(\frac{1}{\pi}n\right)$

(b) Welche Bedingung gilt für das Pol- / Nullstellendiagramm eines zeitdiskreten Allpasses?

- ☐ Für jede Nullstelle z_0 gibt es eine Polstelle z_∞ sodass gilt: $z_0 = \frac{1}{z_\infty^*}$.
- ☐ Alle Nullstellen sind innerhalb des Einheitskreises.
- ☐ Nullstellen treten in konjugiert komplexen Paaren auf.

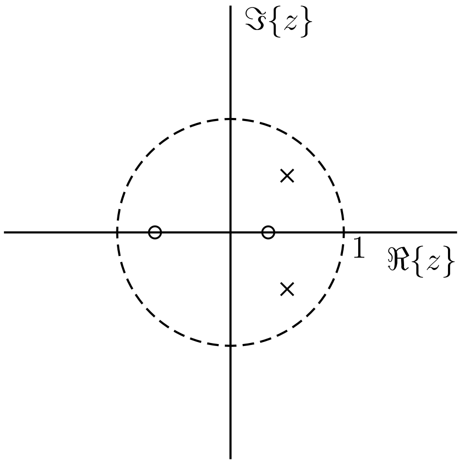


Abb. 1: Pol-/Nullstellendiagramm von $H(z)$.

(c) Welche Aussage bezüglich der Stabilität von $H(z)$, repräsentiert durch das Pol-/Nullstellendiagramm in Abb. 1, trifft zu?

- ☐ $H(z)$ ist stabil.
- ☐ $H(z)$ ist instabil.
- ☐ Das Pol-/Nullstellendiagramm alleine reicht nicht aus um zu bestimmen ob $H(z)$ stabil oder instabil ist.

(d) Das overlap-add Verfahren

- ☐ ist eine schnelle Implementierung der Fast Fourier Transform.
- ☐ nutzt Bedingungen um die lineare Faltung als zyklische Faltung darzustellen.
- ☐ dient der Faltung mit infinite impulse response Filtern.

(e) Welche Behauptung über das ideale Tiefpassfilter trifft NICHT zu?

- ☐ Das ideale Tiefpassfilter ist kausal.
- ☐ Die Impulsantwort des idealen Tiefpassfilters ist unendlich lang.
- ☐ Das ideale Tiefpassfilter hat Unstetigkeitsstellen im Frequenzbereich.

Kurzaufgaben (20 Punkte)

(a) Ein zeitkontinuierliches Signal $x_c(t)$ ist gegeben als

$$x_c(t) = \sin(\omega_0 t)$$

welches mit der Frequenz $1/T_s = 4\frac{\omega_0}{2\pi}$ abgetastet wird, sodass $x[n] = x_c(nT_s)$. Skizzieren Sie $X(e^{j\theta}) = \text{DTFT}\{x[n]\}$ (beachten Sie $X(e^{j\theta}) \in \mathbb{C}$). Skizzieren Sie $Y(e^{j\theta}) = \text{DTFT}\{y[n]\}$, wobei $y[n] = x[2n]$ einer um den Faktor 2 unterabgetasteten Version des Signals $x[n]$ entspricht.

(b) Sei $h[n]$ ein kausales, lineares und zeitinvariantes System mit z-Transformierter $H(z)$, gegeben als

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{K} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{L} a_k z^{-k}} \tag{1}$$

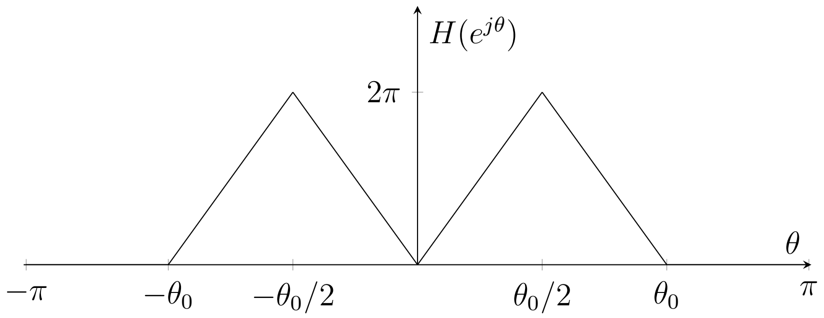
Skizzieren Sie die region-of-convergence (ROC) von $H(z)$ für $K = 0, L = 2$ und $b_0 = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -4/5$, $a_2 = 3/25$.

(c) Sei $H(z)$ gegeben in Formel (1) mit Koeffizienten $L = 2$, $a_0 = 1, a_1 = -4/5, a_2 = 3/25$ und $K > 0$, $b_0 \neq 0$. Gesucht sind die Koeffizienten b_k, sodass $(x * h)[n] = 0$ mit $x[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n - 1)$.

Aufgabe 1 (30 Punkte)

Bei diesem Beispiel kann jeder Unterpunkt individuell gelöst werden.

Sei $h[n]$ gegeben als Fouriertransformierte $H(e^{j\theta})$



mit $0 < \theta_0 \leq \pi$.

(a) Berechnen Sie $h[n]$ bei $n = 0$ und $n \to \infty$.

(b) Sei

$$x_1[n] = A\frac{\sin(\theta_1 n)}{\pi n}$$

mit $A > 0$, $0 < \theta_1 \leq \pi$ und $y_1[n] = (h * x_1)[n]$. Gesucht ist eine Bedingung für A und θ_1 als Funktion von θ_0, sodass $y_1[n] = h[n]$.

(c) Sei

$$x_2[n] = \sin(\theta_2 n)$$

Berechnen Sie $y_2[n] = (h * x_2)[n]$. Nutzen Sie die Eigenschaft von Eigensignalen.

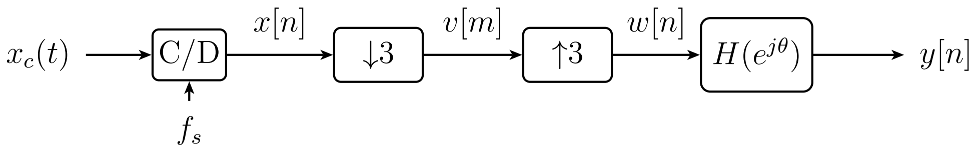
(d) Sei

$$x_3[n] = \sin^2(\theta_3 n)$$

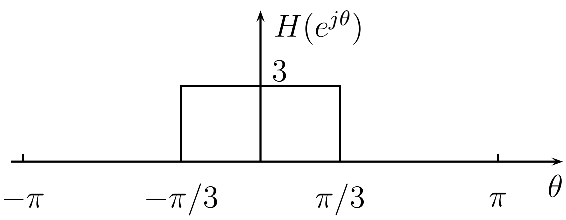
Berechnen Sie $y_3[n] = (h * x_3)[n]$ und vereinfachen Sie soweit wie möglich für $\theta_0 = \pi$, $\theta_3 = \pi/2$. Skizzieren Sie $y_3[n]$ im Bereich $0 \leq n < 8$.

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Betrachten Sie folgendes System:



Die Frequenzantwort des idealen Tiefpassfilters $H(e^{j\theta})$ ist gegeben als:



Das zeitkontinuierliche Eingangssignal $x_c(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ mit der Frequenz $f_0 = 200\,\text{Hz}$ wird mit einer Abtastrate von $f_s = 0.8\,\text{kHz}$ abgetastet um das zeitdiskrete Signal $x[n]$ zu erhalten.

(a) Bestimmen Sie das zeitdiskrete Signal $x[n]$. Können Sie eine weitere Möglichkeit für die Wahl von f_0 nennen, die bei selber Abtastrate dasselbe zeitdiskrete Signal $x[n]$ ergibt?

(b) Skizzieren Sie die Fouriertransformierten der Signale $x[n]$, $v[m]$ und $w[n]$ für das Eingangssignal $x_c(t)$. Skizzieren Sie mindestens zwei Perioden des jeweiligen Spektrums.

(c) Trifft es zu, dass $y[n] = x[n]$ gilt? Falls nicht, skizzieren Sie die Frequenzantwort eines idealisierten Filters für das $y[n] = x[n]$ gilt.

(d) Wiederholen Sie die Punkte **(b)** und **(c)** für eine Abtastrate von $f_s = 1.6\,\text{kHz}$. Wie wirkt sich die Änderung der Abtastrate aus?

(e) Welche Bedingung muss f_0 bei gegebener Abtastrate für obiges System erfüllen, sodass $y[n] = x[n]$ gilt?