Institut für Signalverarbeitung und Sprachkommunikation — Prof. G. Kubin
Technische Universität Graz

Prüfung zur Vorlesung Signalverarbeitung am 30.4.2021

Name MatrNr. StudKennz.

Prüfungsdauer: 3 Stunden, Erreichbare Punkte: 100
Erlaubtes Material: Formelsammlung (wird ausgeteilt), mathematische Formelsammlung, wissenschaftlicher Taschenrechner (*kein* alphanumerischer)
Die Angabeblätter und die Formelsammlung müssen am Schluss wieder abgegeben werden!

Theoriefragen – Multiple Choice (20 Punkte)

Bitte kreuzen Sie die richtigen Antworten an. Es gibt zu jeder Frage genau eine richtige Antwort. Für jede richtige Antwort erhalten Sie 4 Punkte, für jede falsche Antwort werden 2 Punkte abgezogen. Für nicht beantwortete Fragen oder Fragen mit mehr als einer angekreuzten Antwort gibt es weder Punkte noch Punkteabzug. Insgesamt können Sie auf den Multiple-Choice-Teil nicht weniger als 0 Punkte erhalten.

(a) Welche Behauptung über das ideale Tiefpassfilter trifft NICHT zu?

☐ Das ideale Tiefpassfilter ist kausal.

☐ Die Impulsantwort des idealen Tiefpassfilters ist unendlich lang.

☐ Das ideale Tiefpassfilter hat Unstetigkeitsstellen im Frequenzbereich.

(b) Das zeitkontinuierliche Signal $x_c(t) = \cos(2\pi \cdot t \cdot f)$ wird durch Abtastung mit Periode T_s in ein zeitdiskretes Signal $x[n] = \cos(\pi n/2)$ umgewandelt. Nehmen Sie an, dass $f = 1000\,\text{Hz}$. Mit welcher Abtastfrequenz $f_s = 1/T_s$ wurde das Signal abgetastet?

☐ $f_s = 8000\,\text{Hz}$

☐ $f_s = 4000\,\text{Hz}$

☐ $f_s = 1200\,\text{Hz}$

(c) In welchem Verhältnis stehen die zeitkontinuierliche Fouriertransformierte $X(j\omega)$ und die zeitdiskrete Fouriertransformierte (DTFT) $X(e^{j\theta})$ nach dem Abtasten eines zeitkontinuierlichen Signals $x(t)$?

- ☐ Die kontinuierlichen Frequenzwerte ω werden durch die Bilineartransformation in äquivalente zeitdiskrete θ übeführt, dadurch wird $X(j\omega)$ zu $X(e^{j\theta})$ umgewandelt.
- ☐ Die Fouriertransformierte $X(j\omega)$ wird periodisch wiederholt in Abständen von 2π, wobei dieser Abstand der Abtastfrequenz f_s entspricht und es bei Verletzung des Nyquist Theorems zu Aliasing kommt.
- ☐ Die Fouriertransformierte $X(j\omega)$ wird in Abständen von $1/f_s$ abgetastet um die DTFT $X(e^{j\theta})$ zu erhalten.

(d) Welche Operation erhöht die Abtastrate eines Signals $x[n]$ um den Überabtastfaktor $L = 2$?

- ☐ Einfügen von *zwei* Nullen zwischen zwei benachbarten Abtastpunkten (z.B. zwischen $x[n]$ und $x[n-1]$).
- ☐ Verwerfen jedes zweiten Abtastpunktes (z.B. $x[n]$, $x[n-2]$, $\ldots$).
- ☐ Einfügen von *einer* Null zwischen zwei benachbarten Abtastpunkten (z.B. zwischen $x[n]$ und $x[n-1]$).

(e) Welches der folgenden zeitdiskreten Signale, d.h., $n \in \mathbb{Z}$, ist periodisch?

- ☐ $\cos(3n)$
- ☐ $\cos(\pi n)$
- ☐ $\cos(\frac{1}{\pi} n)$

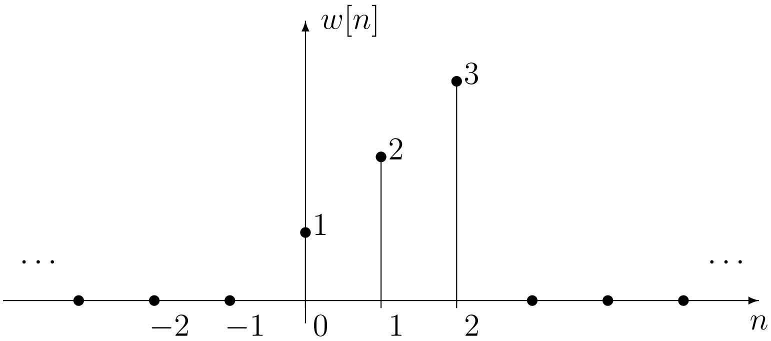
Kurzaufgaben (20 Punkte)

(a) Berechnen Sie die N-Punkte DFT von folgenden Signalen, die für $n = 0, \dots, N-1$ definiert sind:

1. $x_1[n] = \delta[n]$
2. $x_2[n] = a^n$
3. $x_3[n] = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$ für N ist geradzahlig

(b) Bestimmen Sie eine Sequenz $x[n]$, die folgende drei Bedingungen erfüllt:

1. Die DTFT von $x[n]$ hat folgende Form:
$$X(e^{j\theta}) = 1 + A_1 \cos(\theta) + A_2 \cos(2\theta), \tag{1}$$
wobei A_1 und A_2 unbekannte Konstanten sind.
2. Die Sequenz $x[n] * \delta[n-3]$ ausgewertet an der Stelle $n = 2$ ist 5.
3. Entnehmen Sie die zweiseitige Fenster-Sequenz $w[n]$ aus der Skizze. Die 8-Punkte zyklische Faltung von $w[n]$ und $x[n-3]$ ist 11 für $n = 2$, d.h.,
$$\left. \sum_{m=0}^{7} w[m] x[(n-3-m) \bmod 8] \right|_{n=2} = 11. \tag{2}$$



Aufgabe 1 (30 Punkte)

Ein zeitdiskretes Filter $h[n]$ sei durch folgende Differenzengleichung beschrieben

$$y[n] - \frac{1}{2}\left(y[n-1] + y[n-2]\right) = 2x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$$

mit Eingangssignal $x[n]$ und Ausgangssignal $y[n]$.

(a) Ist das System kausal? Begründen Sie!

(b) Skizzieren Sie die Impulsantwort $h[n]$ im Bereich $-1 \leq n \leq 4$ mit Beschriftung aller charakteristischen Werte.

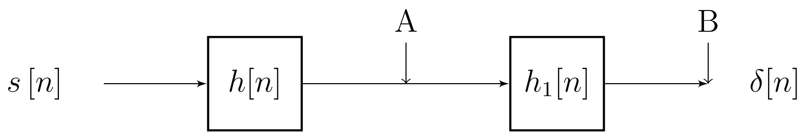
(c) Bestimmen Sie $H(z)$. Skizzieren Sie mit Beschriftung aller charakteristischen Werte das Pol- / Nullstellendiagramm und begründen Sie, ob das Filter stabil ist. Markieren Sie den Konvergenzbereich (ROC).

(d) Geben Sie die Differenzengleichung des Systems $h_1[n]$ an, sodass gilt

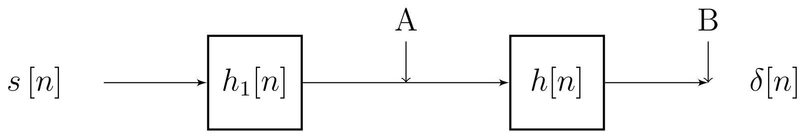
$$h[n] * h_1[n] = \delta[n].$$

(e) Welche Kaskadenschaltung von $h[n]$ und $h_1[n]$ – (i) oder (ii) – stellt die Stabilität an beiden markierten Punkten A *und* B des Systems sicher?

(i) $h[n] * h_1[n]$



(ii) $h_1[n] * h[n]$



Begründen Sie!

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Gegeben sei folgende allgemeine Form der Impulsantwort $h_i[n]$ eines kausalen FIR Filters der Ordnung N:

$$h_i[n] = \sum_{k=0}^{N} a_{i,k}\delta[n-k],$$

wobei $a_{i,k}$ den k-ten Koeffizienten des Filters i repräsentiert. Weiters sei $H_i(e^{j\theta})$ die DTFT der Impulsantwort $h_i[n]$.

(a) Gegeben sei $F_2(e^{j\theta}) = \delta_{2\pi}(\theta - \pi)$. Zeigen Sie, dass für

$$H_2(e^{j\theta}) = (H_1 * F_2)(e^{j\theta})$$

gilt

$$a_{2,k} = \begin{cases} a_{1,k} & \text{für} \quad (k) \bmod 2 = 0, \\ -a_{1,k} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Finden Sie eine Funktion $F_3(e^{j\theta})$, sodass für

$$H_3(e^{j\theta}) = (H_1 * F_3)(e^{j\theta})$$

gilt

$$a_{3,k} = \begin{cases} -a_{1,k} & \text{für} \quad (k) \bmod 2 = 0, \\ a_{1,k} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Finden Sie weiters eine Zahl der Form $C = Ae^{j\phi}$ (in Polarform) mit $\phi \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, sodass unter der obigen Bedingung gilt

$$H_3(e^{j\theta}) = C \cdot H_2(e^{j\theta})$$

(c) Für diesen und alle weiteren Unterpunkte setzen Sie $N = 2$ und $a_{1,0} = a_{1,1} = a_{1,2} = \frac{1}{3}$. Skizieren Sie $h_1[n]$, $h_2[n]$, $h_3[n]$ sowie Absolutbetrag **und** Phase der dazugehörigen DTFTs $H_1(e^{j\theta})$, $H_2(e^{j\theta})$ und $H_3(e^{j\theta})$.

(d) Ordnen Sie jeder der drei Impulsantworten jeweils eine der Filtercharakteristiken Bandpass, Hochpass und Tiefpass zu. Welches der drei Filter würden Sie verwenden um ein Signal zu glätten?

(e) Welche der drei Filter sind minimalphasig? Welche der drei Filter sind linearphasig? Mit welcher Funktion müssten Sie $h_1[n]$ falten um ein nullphasiges Filter zu erhalten?