Institut für Signalverarbeitung und Sprachkommunikation — Prof. G. Kubin
Technische Universität Graz

Prüfung zur VO 442.001 Signalverarbeitung, 06.09.2021

Name:

Matrikelnr.:

Prüfungsdauer: 150 Minuten, Erreichbare Punkte: 100
Erlaubtes Material: beigelegte SPSC Formelsammlung, wissenschaftlicher Taschenrechner (*kein* alphanumerischer)
Die Angabeblätter und die Formelsammlung müssen am Ende der Prüfung wieder abgegeben werden!

Theorie – Multiple Choice Fragen (20 Punkte)

Bitte kreuzen Sie die richtigen Antworten an. Es gibt zu jeder Frage genau eine richtige Antwort. Für jede richtige Antwort erhalten Sie 4 Punkte, für jede falsche Antwort werden 2 Punkte abgezogen. Für nicht beantwortete Fragen oder Fragen mit mehr als einer angekreuzten Antwort gibt es weder Punkte noch Punkteabzug. Insgesamt können Sie auf den Multiple-Choice-Teil nicht weniger als 0 Punkte erhalten.

(a) Welches der folgenden Systeme ist linear und zeitinvariant?

- ☐ $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{|n|} x[n]$.
- ☐ $y[n-1] = x[n-1] + \tan(4)\, x[n] - \cos(0.4\pi n)\, y[n]$.
- ☐ $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n+1} \cos^2(\pi/3)\, x[m]$.
- ☐ $y[n] = x[12n]$.

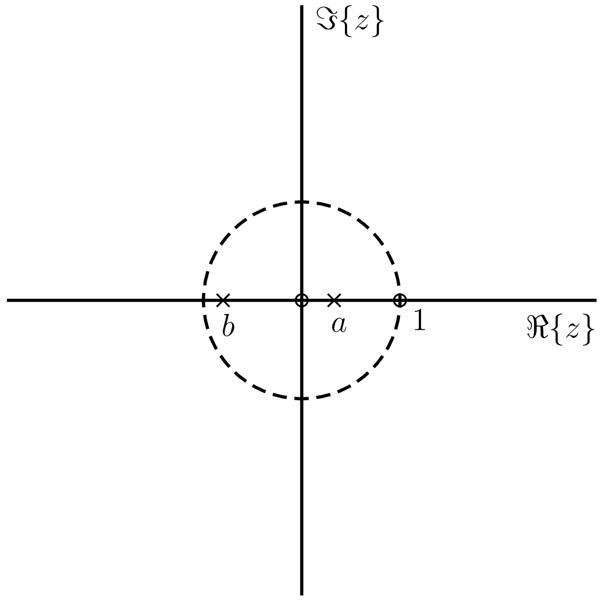


Abbildung 1: Pol-/Nullstellendiagramm von $H(z)$.

(b) Wie sind die Fast-Fourier-Transformation (FFT) und die zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT) miteinander verwandt?

- ☐ Die DTFT entspricht der FFT für zeitdiskrete Signale.
- ☐ Die FFT ist ein effizienter Algorithmus zur Berechnung der DTFT.
- ☐ Die DTFT ist die am Einheitskreis ausgewertete FFT.
- ☐ Die FFT ist ein effizienter Algorithmus zur Berechnung der abgetasteten DTFT.

(c) Sei $H(z)$ repräsentiert durch das Pol- / Nullstellendiagramm in Abb. 1. Für welchen Konvergenzbereich (ROC) existiert auch eine Fouriertransformierte?

- ☐ $|z| > b$
- ☐ $a < |z| < b$
- ☐ $|z| < a$
- ☐ In diesem Fall existiert keine Fouriertransformierte, da eine Nullstelle am Einheitskreis liegt.

(d) Welche der folgenden DTFT Funktionen ist die DTFT einer reellwertigen, zeitdiskreten Sequenz?

- ☐ $X(e^{j\theta}) = \delta_{2\pi}(\theta - \pi)$
- ☐ $X(e^{j\theta}) = \frac{\pi}{j}\delta_{2\pi}(\theta + \frac{\pi}{4})$
- ☐ $X(e^{j\theta}) = \sin(\theta)$
- ☐ $X(e^{j\theta}) = \begin{cases} \pi & \text{wenn} \quad \frac{\pi}{4} < \theta \mod 2\pi < \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(e) Unter welchen Bedingungen tritt der Aliasing Effekt jedenfalls auf?

- ☐ Beim Down-sampling, wenn nicht zuvor ein Tiefpassfilter verwendet wird.
- ☐ Beim Abtasten eines zeitkontinuierlichen Signals, dessen höchster Frequenzanteil die Abtastfrequenz um einen rationalen Faktor $\frac{11}{10}$ überschreitet.
- ☐ Beim Up-sampling mit rationalen Faktoren, z.B. $\frac{102}{100}$.
- ☐ Beim Abtasten eines zeitkontinuierlichen Signals, wenn nicht zuvor ein Tiefpassfilter verwendet wird.

Kurzaufgaben (20 Punkte)

(a) Die Basis $\mathcal{B}$ wird von N Basissignalen $b_k[n] \in \mathbb{C}$ der Form

$$b_k[n] = \mathrm{e}^{j\frac{2\pi kn}{N}}$$

aufgespannt, wobei $k, n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Orthogonalbasis ist und bestimmen Sie den Skalierungsfaktor α in Abhängigkeit von N, sodass die Signale $\tilde{b}_k[n] = \alpha \cdot b_k[n]$ eine Orthonormalbasis aufspannen. Hinweis: $\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{q^N-1}{q-1}$.

(b) Ein kausales LZI-System erfüllt die Differenzengleichung

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{4}x[n-2].$$

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ und skizzieren Sie das Pol-/Nullstellendiagramm. Ist das System stabil? Bestimmen Sie die Impulsantwort $h[n]$ des Systems. Hinweis: Verwenden Sie eine Partialbruchzerlegung um $H(z)$ aufzuspalten.

Aufgabe 1 (30 Punkte)

Gegeben sei ein zeitdiskretes kausales LTI-System mit der Systemfunktion $H_1(z)$. Die Pole von $H_1(z)$ seien $z_{\infty,1} = -0.8$ und $z_{\infty,2} = 0.5$. Die Nullstellen seien $z_{0,1} = 1.25$ und $z_{0,2} = -0.5j$.

(a) Zeichnen sie den Pol-/Nullstellenplan und geben Sie den Konvergenzbereich (ROC) an. Ist das System BIBO-stabil? Begründen Sie!

(b) Ein System ist minimalphasig wenn es eine stabile, kausale Inverse besitzt. Ist $H_1(z)$ minimalphasig? Begründen Sie!

(c) Nehmen Sie an, dass das Maximum des Betragsfrequenzganges $\max_\theta |H_1(e^{j\theta})| = 1$ ist. Geben Sie die Systemfunktion $H_1(z)$ an.

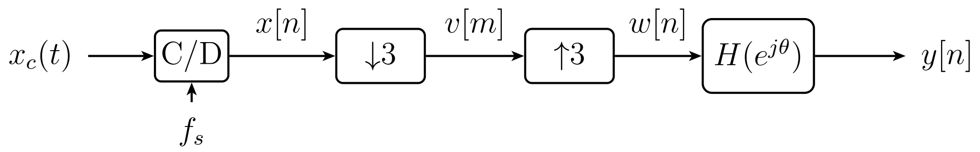
(d) Entwerfen Sie für das System $H_1(z)$ einen kausalen und stabilen Entzerrer mit Systemfunktion $H_2(z)$, sodass der Betragsfrequenzgang des Gesamtsystems $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ konstant gleich 1 wird, d.h. $H(z)$ ist ein Allpass mit $|H(e^{j\theta})| = 1$.

(e) In der Abbildung ist $H_2(z)$ als Entzerrer hinter $H_1(z)$ geschalten. Könnten Sie $H_2(z)$ auch als Vorverzerrer vor $H_1(z)$ schalten, ohne das Ergebnis, also $H(z)$, zu verändern? Begründen Sie.

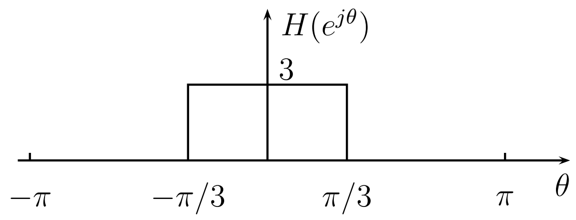
$$x[n] \longrightarrow \boxed{H_1(z)} \longrightarrow \boxed{H_2(z)} \longrightarrow y[n]$$

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Betrachten Sie folgendes System:



Die Frequenzantwort des idealen Tiefpassfilters $H(e^{j\theta})$ ist gegeben als:



Das zeitkontinuierliche Eingangssignal $x_c(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ mit der Frequenz $f_0 = 200\,\text{Hz}$ wird mit einer Abtastrate von $f_s = 0.8\,\text{kHz}$ abgetastet um das zeitdiskrete Signal $x[n]$ zu erhalten.

(a) Bestimmen Sie das zeitdiskrete Signal $x[n]$. Können Sie eine weitere Möglichkeit für die Wahl von f_0 nennen, die bei selber Abtastrate dasselbe zeitdiskrete Signal $x[n]$ ergibt?

(b) Skizzieren Sie die Fouriertransformierten der Signale $x[n]$, $v[m]$ und $w[n]$ für das Eingangssignal $x_c(t)$. Skizzieren Sie mindestens zwei Perioden des jeweiligen Spektrums.

(c) Trifft es zu, dass $y[n] = x[n]$ gilt? Falls nicht, skizzieren Sie die Frequenzantwort eines idealisierten Filters für das $y[n] = x[n]$ gilt.

(d) Wiederholen Sie die Punkte (b) und (c) für eine Abtastrate von $f_s = 1.6\,\text{kHz}$. Wie wirkt sich die Änderung der Abtastrate aus?

(e) Welche Bedingung muss f_0 bei gegebener Abtastrate für obiges System erfüllen, sodass $y[n] = x[n]$ gilt?